Notas de Cálculo

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES
(Bloque 1, Tema 1)

Grado en Ingeniería de Organización Industrial
UPCT−CUD San Javier
Curso 2020-21 (v. 1.1)

Índice

Introducción

Este documento desarrolla el siguiente tema de la asignatura Cálculo:

- Bloque 1, Tema 1: Funciones de varias variables.

Las unidades didácticas se componen del resumen de la teoría matemática (definiciones, proposiciones y notas prácticas), ejemplos resueltos (sobre los conceptos teóricos y los métodos de resolución de problemas) y ejercicios propuestos (que incluyen la solución para permitir la autocomprobación en el trabajo individual del alumno).

Algunas lecturas recomendadas para esta parte del temario, incluidas en la bibliografía de la asignatura, son:

- Marsden, J. E. y Tromba, A. J. 2018. Cálculo vectorial, 6ª ed. Pearson.
- García, A. López, A., Rodríguez, G., Romero, S., de la Villa, A. 2002. Teoría y problemas de funciones de varias variables. Clagsa.
- Burgos, J. 2007. Cálculo infinitesimal de varias variables. McGraw-Hill.

T. Baenas
tomas.baenas@cud.upct.es

Febrero, 2021

Tema 1

Funciones de varias variables

1.1. El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

Definición 1.1. Llamaremos espacio euclídeo $n-$dimensional al conjunto

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ / \ x_i \in \mathbb{R}, \, i = 1, \ldots, n\}, \tag{1.1}$$

esto es, el producto cartesiano $\mathbb{R} \times \overset{n \text{ veces}}{\cdots} \times \mathbb{R}$ formado por $n-$tuplas de números reales. En este conjunto definimos las operaciones:

1. **Suma** $(+)$: ley de composición interna dada por

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \tag{1.2}$$

2. **Producto por escalar**: ley de composición externa (producto de un número real por un elemento de $\mathbb{R}^n$)

$$\lambda (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n), \, \lambda \in \mathbb{R}, \tag{1.3}$$

que dotan a $\mathbb{R}^n$ de estructura de **espacio vectorial**. Si añadimos además la operación

3. **Producto escalar canónico** $(\cdot)$: también llamado producto interior, definido según

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \ldots, y_n) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n, \tag{1.4}$$

entonces $\mathbb{R}^n$ es un **espacio vectorial euclídeo**.

Nota 1.1. A los elementos de $\mathbb{R}^n$ los denominaremos indistintamente **puntos** o **vectores**, y los denotaremos como $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Definición 1.2. Se define la **base canónica** de $\mathbb{R}^n$ como el sistema de n vectores de la forma

$$\mathbf{e}_i = (0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0) \tag{1.5}$$

donde el 1 está en la posición $i-$ésima, con $i = 1, 2, \ldots, n$. Es decir, la componente $j-$ésima del vector $i-$ésimo de la base canónica es δ_{ij} (delta de Kronecker: $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$). Dado $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, los números reales x_i también se denominan **coordenadas cartesianas** del vector $\mathbf{x}$, y coinciden con sus coordenadas en la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.3. La **norma** (euclídea) de un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se define como

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}. \tag{1.6}$$

Definición 1.4. Dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, se denomina **distancia** del punto $\mathbf{x}$ al punto $\mathbf{y}$ a la norma del vector $\mathbf{x} - \mathbf{y}$, esto es, $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. La norma de un vector coincide con la distancia del punto al origen.

Definición 1.5 (Coordenadas polares)**.** Dado un punto $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, se definen las **coordenadas polares** (r, θ) de $\mathbf{x}$ mediante las siguientes relaciones con las coordenadas cartesianas:

$$x = r\cos\theta,\ y = r\operatorname{sen}\theta, \tag{1.7}$$

con $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$.

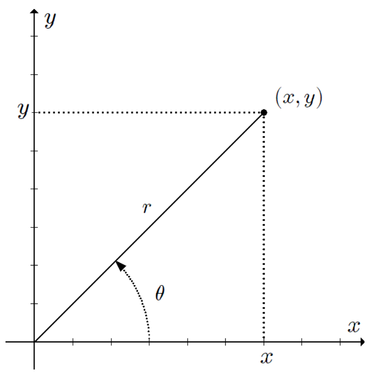

Figura 1.1: Coordenadas polares.

Nota 1.2. La obtención de las coordenadas polares $r \neq 0$ y θ a partir de las relaciones inversas de 1.7 es análoga a la obtención del módulo y el argumento principal del número complejo (x, y), tal y como se estudia en los temas de variable compleja.

Nota 1.3 (Coordenadas esféricas). Dado un punto $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, se definen las **coordenadas esféricas** (r, θ, ϕ) de $\mathbf{x}$ mediante las siguientes relaciones con las coordenadas cartesianas:

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta,\ y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta,\ z = \rho \cos \phi, \tag{1.8}$$

con $\rho \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$, $\phi \in [0, \pi]$.

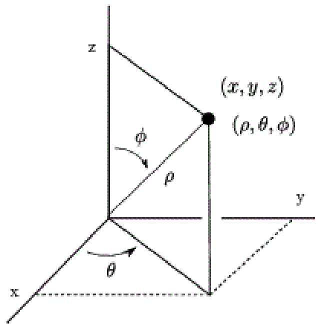

Figura 1.2: Coordenadas esféricas.

Nota 1.4. La obtención de las coordenadas esféricas $\rho \neq 0$, θ y ϕ a partir de las relaciones inversas de 1.8 se realiza con

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

esto es, la distancia euclídea de $\mathbf{x}$ al origen,

$$\phi = \arccos \frac{z}{\rho},$$

ya que la función $\arccos$ tiene imagen en $[0, \pi]$, y finalmente determinando θ con las relaciones

$$x = (\rho \operatorname{sen} \phi) \cos \theta,\ y = (\rho \operatorname{sen} \phi) \operatorname{sen} \theta,$$

donde ρ y ϕ ya son conocidos, procediendo igual que con las coordenadas polares.

1.2. Nociones de topología de $\mathbb{R}^n$

Definición 1.6 (Entornos). Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. Los siguientes conjuntos se denominan **entornos** de centro $\mathbf{x}$ radio δ:

$$\begin{array}{lll} B(\mathbf{x}, \delta) & = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \ / \ \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta\} & \text{Entorno abierto} \\ \bar{B}(\mathbf{x}, \delta) & = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \ / \ \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \delta\} & \text{Entorno cerrado} \\ B^*(\mathbf{x}, \delta) & = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \ / \ 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta\} & \text{Entorno reducido} \end{array} \tag{1.9}$$

Ejemplo 1. En $\mathbb{R}$ los entornos abierto y cerrado coinciden con los intervalos abierto y cerrado de centro $\mathbf{x} = (x) = x$ y radio δ. En efecto, dado que

$$|x - y| < \delta \leftrightarrow -\delta < x - y < \delta \leftrightarrow x - \delta < y < x + \delta$$

(y de forma análoga en el caso con $\leq$) se tiene,

$$\begin{aligned} B(x,\delta) &= \left]x-\delta, x+\delta\right[, \\ \bar{B}(x,\delta) &= [x-\delta, x+\delta], \\ B^*(x,\delta) &= \left]x-\delta, x+\delta\right[\setminus \{x\}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2. En $\mathbb{R}^2$ un entorno abierto es un círculo de radio δ centrado en $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ que excluye la circunferencia que lo delimita, el entorno cerrado es el círculo completo, y el entorno reducido es un entorno abierto que excluye el propio centro, es decir,

$$\begin{aligned} B(\mathbf{x}_0,\delta) &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \delta^2\right\}, \\ \bar{B}(\mathbf{x}_0,\delta) &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq \delta^2\right\}, \\ B^*(\mathbf{x}_0,\delta) &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \delta^2\right\} \setminus \{(x_0,y_0)\}. \end{aligned}$$

Definición 1.7. Sea un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Se dice que

1. Un punto $\mathbf{x} \in A$ es un **punto interior** de A si existe un radio $\delta_{\mathbf{x}} > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, \delta_{\mathbf{x}}) \subset A$. Al conjunto de todos lo puntos interiores de A se le llama **interior** de A y se representa por $\operatorname{Int} A$.

2. Un punto $\mathbf{x} \notin A$ es un **punto exterior** de A si existe un radio $\delta_{\mathbf{x}}$ tal que $B(\mathbf{x}, \delta_{\mathbf{x}}) \cap A = \varnothing$. Al conjunto de todos los puntos exteriores de A se le llama **exterior** de A y se representa por $\operatorname{Ext} A$.

3. Un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es un **punto frontera** de A si no es punto interior ni exterior de A. Al conjunto de todos los puntos frontera de A se le llama **frontera** de A y se representa por $\operatorname{Fr} A$ ó ∂A.

Definición 1.8. Sea un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Se dice que

1. A es un **conjunto abierto** si es vacío o todos sus puntos son interiores.

2. A es un **conjunto cerrado** si su complementario en $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n \backslash A$, es un conjunto abierto.

3. A es un **conjunto acotado** si existe $M > 0$ tal que $A \subset B(\mathbf{0}, M)$.

4. A es un **conjunto compacto** si es cerrado y acotado.

Nota 1.5. Los conjuntos $\mathbb{R}^n$ y $\varnothing$ son abiertos y cerrados. Los entornos $B(\mathbf{x}, \delta)$ son conjuntos abiertos, y $\bar{B}(\mathbf{x}, \delta)$ cerrados. $\operatorname{Int} A$ y $\operatorname{Ext} A$ son conjuntos abiertos, $\operatorname{Fr} A$ es cerrado.

Proposición 1.1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. A es cerrado si, y sólo si, contiene a todos sus puntos frontera, o equivalentemente, si $A = \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Fr} A$.

Ejemplo 3. Sea $A = \{0\} \cup [1, 2[$, subconjunto de $\mathbb{R}$. En este conjunto $\operatorname{Int} A =]1, 2[$ y $\operatorname{Fr} A = \{0\} \cup \{1\} \cup \{2\}$. A no es abierto ($\operatorname{Int} A \neq A$) ni cerrado (el punto 2 de la frontera no pertenece a A). A es acotado ya que $A \subset B(0, r)$ con $r \geq 2$.

Nota 1.6. En este ejemplo, el punto $x_0 = 0$ se denomina *aislado*, ya que en un entorno reducido suyo no existen otros puntos de A, esto es, existe $\delta > 0$ tal que $B^*(x_0, \delta) \cap A = \varnothing$. Si un punto no es aislado se llama de *acumulación*.

Ejemplo 4. Sea $A = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} \times [0, 1]$, subconjunto de $\mathbb{R}^2$. En este conjunto $\operatorname{Int} A = \varnothing$ y $\operatorname{Fr} A = \{\{0\} \times [0, 1]\} \cup A$. A no es abierto ($\operatorname{Int} A \neq A$) ni cerrado (el segmento $\{0\} \times [0, 1]$ de la frontera no está contenido en A). A es acotado ya que $A \subset B(0, r)$ con $r > \sqrt{2}$.

Ejemplo 5. Si $A \neq \varnothing$ es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ y $R \subset \mathbb{R}^2$ es una recta, entonces $A \backslash R$ es también un abierto. En efecto, tomemos un punto $\mathbf{x}_0$ de $A \backslash R$ (esto es, un punto de A que no es de R). Como A es abierto entonces existe $\delta_1 > 0$ tal que $B(\mathbf{x}_0, \delta_1) \subset A$. Como $\mathbf{x}_0 \notin C$, entonces existe $\delta_2 > 0$ tal que $B(\mathbf{x}_0, \delta_2) \cap R = \varnothing$. Por lo tanto, si tomamos el menor valor de estos radios, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, se tiene que $B(\mathbf{x}_0, \delta) \subset A \backslash R$, esto es, $A \backslash R$ es un conjunto abierto.

Nota 1.7. Por lo tanto si en un conjunto abierto $A \neq \varnothing$ de $\mathbb{R}^2$ quitamos los puntos de una recta (que entra y sale de A), el conjunto resultante sigue siendo abierto. Sin embargo, si en lugar de quitar la recta, quitamos un segmento contenido en el conjunto, sin que éste incluya alguno de sus extremos, el conjunto resultante no es abierto (la figura 1.3 puede ayudar a visualizar las diferencias entre estas situaciones). P. ej., si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son puntos de A y quitamos el segmento L de extremos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, incluyendo $\mathbf{a}$ pero excluyendo $\mathbf{b}$, entonces $\mathbf{b} \in A \backslash L$, pero cualquier entorno centrado en $\mathbf{b}$ tiene puntos que no pertenecen a $A \backslash L$, $B(\mathbf{b}, \delta) \not\subset (A \backslash L)$, o equivalentemente, $A \backslash L$ no es un conjunto abierto.

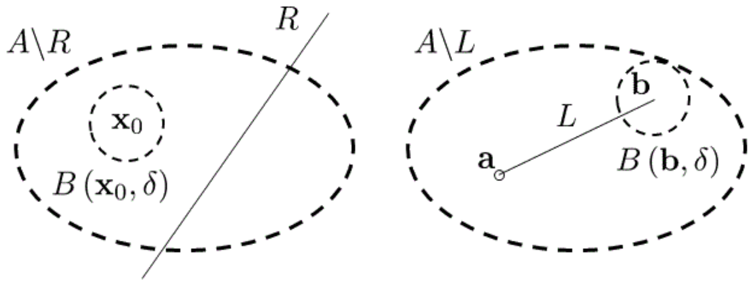

Figura 1.3: Esquemas del ejemplo 5.

Ejemplo 6. En la práctica habitual en este curso, los conjuntos de $\mathbb{R}^n$ definidos a través de igualdades o desigualdades no estrictas ($=$, $\geq$, $\leq$) son conjuntos cerrados. Los definidos mediante desigualdades estrictas ($>$, $<$) son conjuntos abiertos. Los que combinan desigualdades estricas y no estrictas no son abiertos ni cerrados. P. ej.: si consideramos

$$\begin{aligned}
A_1 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; 0 \leq x < 1,\, 0 \leq y < 1\right\}, \\
A_2 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x^2 - y^2 \geq 1\right\}, \\
A_3 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; y > x^2\right\}, \\
A_4 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x^2 + y^2 \leq 3\right\},
\end{aligned}$$

se tiene que el conjunto A_1 no es abierto ni cerrado, A_2 es cerrado, A_3 es abierto y A_4 es compacto.

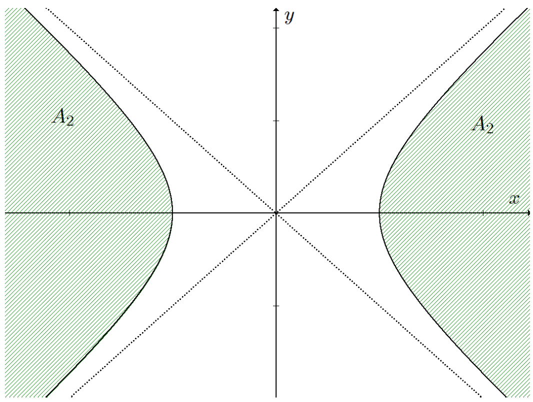

Figura 1.4: Representación gráfica de A_2 del ejemplo 6.

Definición 1.9 (Segmentos)**.** Dados $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, llamaremos **segmentos abierto** (L) y **cerrado** ($\bar{L}$) de extremos **a** y **b**, a los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned} L(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbf{x} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}), 0 < t < 1\}, \\ \bar{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbf{x} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}), 0 \le t \le 1\}. \end{aligned}$$

Definición 1.10. Sea un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Se dice que A es **convexo** si para todo par de puntos $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A$, el segmento que los une está contenido en A, esto es, $\bar{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \subseteq A$.

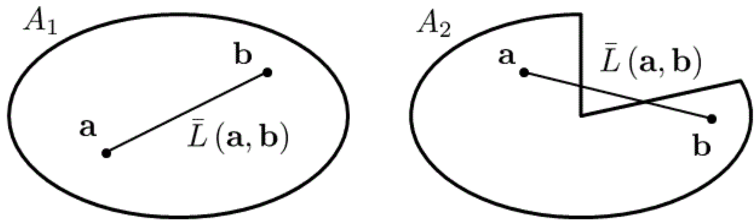

Figura 1.5: Ejemplo de conjunto convexo (A_1) y no convexo (A_2) en $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 7. Los entornos $B(\mathbf{x}, \delta)$ y $\bar{B}(\mathbf{x}, \delta)$ son conjuntos convexos. El entorno $B^*(\mathbf{x}, \delta)$ es no convexo. Las dos semirrectas que forman un ángulo α son un conjunto no convexo. La región angular (porción del plano $\mathbb{R}^2$) interior con $\alpha \in [0, \pi[$ rad es convexa, la exterior es no convexa. Los conjuntos del ejemplo 6 son A_1 convexo, A_2 (figura 1.4) no convexo, A_3 convexo, A_4 convexo.

1.3. Funciones escalares

Definición 1.11. Una **función real escalar**, o campo escalar, de n variables reales es una aplicación de la forma

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Al conjunto A se le denomina **dominio** de f y lo representaremos por $\operatorname{dom} f$. La **imagen** o rango de la función f es el conjunto $\operatorname{im} f = \{f(\mathbf{x}) \ / \ \mathbf{x} \in A\}$, que también se denota por $f(A)$. La **gráfica** o grafo de la función f es el conjunto $\operatorname{graf} f = \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \ / \ \mathbf{x} \in A\}$.

Nota 1.8. Consideraremos que $\operatorname{dom} f$ está formado por todos los puntos en los que la función está definida (campo de definición), salvo que el dominio venga dado de forma explícita junto a la definición de la función.

Nota 1.9. El conjunto $\operatorname{im} f$ está formado por las soluciones de la ecuación $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = r$, $r \in \mathbb{R}$.

Definición 1.12. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Se dice que f es una **función acotada**, acotada superiormente o acotada inferiormente si el conjunto $f(A)$ es respectivamente un conjunto acotado, acotado superiormente o acotado inferiormente.

Definición 1.13 (Operaciones)**.** Sean f y g dos campos escalares de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. Son también funciones escalares las definidas mediante las operaciones:

1. Suma $(f+g)$: $(f+g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$, $\operatorname{dom}(f+g) = \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$.
2. Producto (fg): $(fg)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})\, g(\mathbf{x})$, $\operatorname{dom}(fg) = \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$.
3. Cociente (f/g): $(f/g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})/g(\mathbf{x})$,
   $\operatorname{dom}(f/g) = (\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g) \setminus \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ / \ g(\mathbf{x}) = 0\}$.

Ejemplo 8. Veamos algunos ejemplos de funciones escalares.

1. *Polinomios* de n variables, con expresión general:

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i_1=0}^{p_1} \cdots \sum_{i_n=0}^{p_n} c_{i_1 \ldots i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n},$$

   donde $c_{i_1 \ldots i_n}$ son coeficientes reales, esto es, combinaciones lineales cualesquiera de monomios $x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}$ (de grado $i_1 + \ldots + i_n$). El monomio $x_1^0 \ldots x_n^0$ se denomina término independiente. Por ejemplo:

   a) $p(x, y) = x^3 + x^2 y - xy + x + 1$, polinomio de grado 3 (mayor grado de los monomios), y término independiente 1.

   b) Las *aplicaciones lineales* $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ son polinomios de grado 1 sin término independiente. P.ej., con $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^3$,

$$f(x, y, z) = x - 2y + 3z = (1, -2, 3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

2. *Funciones racionales*: cocientes de dos polinomios de n variables

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{p(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{q(x_1, x_2, \ldots, x_n)},$$

   con $\operatorname{dom} h = \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ / \ q(\mathbf{x}) = 0\}$. P. ej.,

$$h(x, y, z) = \frac{x^2 y^5 + 1}{x^2 + y^4 + z^6}, \ \operatorname{dom} h = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}.$$

3. *Función proyección* $i-$ésima: definda como $\pi_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\pi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_j$, con $j = 1, \ldots, n$. P. ej., $\pi_2(x, y, z) = y$.

Definición 1.14 (Composición de funciones)**.** Sean $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : B \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Se denomina **composición** de f con g, y se escribe $g \circ f$, a la función $(g \circ f)(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x}))$, cuyo dominio es $\{\mathbf{x} \in A \ / \ f(\mathbf{x}) \in B\}$.

$$g \circ f : A \subseteq \underbrace{\overbrace{\mathbb{R}^n}^{x} \longrightarrow}_{f} \underbrace{\overbrace{\mathbb{R}}^{f(\mathbf{x})} \longrightarrow \mathbb{R}}_{g}, \tag{1.10}$$

Nota 1.10. En general construiremos funciones de varias variables mediante las operaciones de las definiciones 1.13 y 1.14, combinando funciones elementales, racionales y polinomios.

Nota 1.11. En la práctica, el dominio de la composición de funciones se determina encontrando el mayor conjunto de $\mathbb{R}^n$ donde todas las expresiones que contiene la función puedan ser evaluadas.

Ejemplo 9. Sea $f(x, y) = \operatorname{sen}\left(x - \sqrt{y-1}\right)$. Se trata de una composición de funciones. La función $x - \sqrt{y-1}$ está definida en $y - 1 \geq 0$, es decir, $y \geq 1$. La función seno está definida en todo $\mathbb{R}$. Por lo tanto, $\operatorname{dom} f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y \geq 1\}$.

Definición 1.15 (Conjuntos de nivel)**.** Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Se denomina **conjunto de nivel** de f correspondiente al punto $k \in \mathbb{R}$, al conjunto $L_k = \{\mathbf{x} \in \operatorname{dom} f \ / \ f(\mathbf{x}) = k\}$. Si $k \notin f(A)$, entonces $L_k = \varnothing$.

Nota 1.12. Los conjuntos de nivel ayudan a visualizar las funciones escalares, ya que representan conjuntos de puntos del dominio donde la función toma el mismo valor, teniendo en cuenta que $L_{k_1} \cap L_{k_2} = \varnothing$ si $k_1 \neq k_2$ ya que f es una aplicación.

Ejemplo 10. Sea $f(x, y) = e^{x+y^2-1}$. $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^2$. Determinamos los conjuntos de nivel con $e^{x+y^2-1} = k$. Dado que $f(x, y) > 0$, entonces $k > 0$. Tomando logaritmos a ambos lados de la ecuación, $x + y^2 - 1 = \log k$. Por lo tanto los conjuntos de nivel (en este caso, curvas de nivel) son, dado $k' = \log k + 1 \in \mathbb{R}$:

$$L_{k'} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ x + y^2 = k'\right\}.$$

Estas curvas son parábolas en el plano $\mathbb{R}^2$ abiertas hacia la izquierda (figuras 1.6 y 1.7).

Ejemplo 11. Los mapas de isobaras (curvas de igual presión) son un ejemplo de representación de un campo escalar (presiones en superficie) usando curvas de nivel. Véase la figura 1.8, extraída de www.aemet.es (22/02/2021).

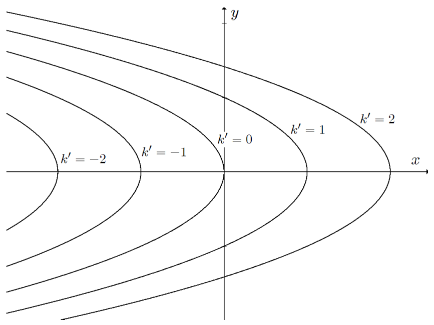

Figura 1.6: Curvas de nivel del ejemplo 10

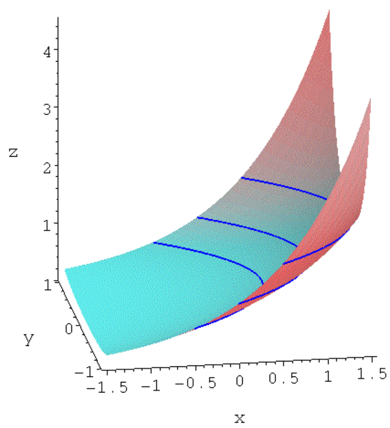

Figura 1.7: Curvas de nivel sobre la superficie del ejemplo 10.

1.4. Funciones vectoriales

Definición 1.16. Una **función real vectorial**, o campo vectorial, de n variables es una aplicación de la forma

$$\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m. \tag{1.11}$$

Al conjunto A se le denomina **dominio** de $\mathbf{f}$ y lo representaremos por $\operatorname{dom}\mathbf{f}$. La **imagen** o rango de la función $\mathbf{f}$ es el conjunto $\operatorname{im}\mathbf{f} = \{\mathbf{f}(\mathbf{x}) \ / \ \mathbf{x} \in A\}$, que también se denota por $\mathbf{f}(A)$. La **gráfica** o grafo de la función $\mathbf{f}$ es el conjunto $\operatorname{graf}\mathbf{f} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \ \mathbf{x} \in A\}$. A cada una de las m componentes de $\mathbf{f}$,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})), \tag{1.12}$$

se les llama **funciones componentes** (o coordenadas) de $\mathbf{f}$.

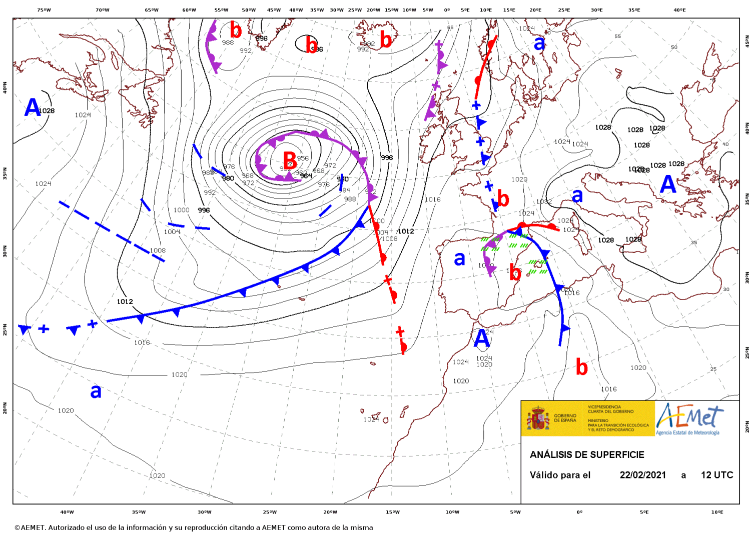

Figura 1.8: Mapa de isobaras (www.aemet.es, 22/02/2021). El mapa incluye además las áreas de alta (A, a) y baja (B, b) presión y los frentes en Europa y el Atlántico Norte.

Nota 1.13. Una función real de variable real es el caso particular de $n = m = 1$. Un campo escalar es el caso particular $m = 1$. Nos referiremos a funciones vectoriales en general cuando $m > 1$.

Definición 1.17. Sean $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ dos campos vectoriales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. La suma $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ es la función vectorial definida por $(\mathbf{f} + \mathbf{g})(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})$, $\operatorname{dom}(\mathbf{f} + \mathbf{g}) = \operatorname{dom}\mathbf{f} \cap \operatorname{dom}\mathbf{g}$.

Nota 1.14. Dado que en general $m > 1$ carece de sentido las operaciones producto y cociente definidas en el caso de funciones escalares. Sí se puede definir el producto escalar o interior de dos funciones vectoriales.

Definición 1.18 (Composición de funciones)**.** Sean $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{g} : B \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Se denomina **composición** de $\mathbf{f}$ con $\mathbf{g}$, y se escribe $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$, a la función $(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$, cuyo dominio es $\{\mathbf{x} \in A \ / \ \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in B\}$.

$$\mathbf{g} \circ \mathbf{f} : A \subseteq \underbrace{\overbrace{\mathbb{R}^n}^{\mathbf{x}} \longrightarrow}_{\mathbf{f}} \underbrace{\overbrace{\mathbb{R}^m}^{\mathbf{f}(\mathbf{x})} \longrightarrow \mathbb{R}^p}_{\mathbf{g}}, \tag{1.13}$$

Nota 1.15. A partir de las funciones proyección π_j (ejemplo 8) se pueden definir las funciones componentes f_j como los m campos escalares definidos en el dom $\mathbf{f}$ mediante la composición $f_j = \pi_j \circ \mathbf{f}$, $j = 1, \ldots, m$. Esta composición nos permite abordar el estudio de las propiedades de $\mathbf{f}$ a través del estudio de sus funciones componentes, esto es, reduciéndolo al estudio de campos escalares.

$$f_j : A \subseteq \underbrace{\overbrace{\mathbb{R}^n}^{\mathbf{x}} \longrightarrow}_{\mathbf{f}} \underbrace{\overbrace{\mathbb{R}^m}^{\mathbf{f}(\mathbf{x})} \longrightarrow \mathbb{R}}_{\pi_j}. \tag{1.14}$$

Ejemplo 12. Veamos algunos ejemplos de funciones vectoriales.

1. Las *aplicaciones lineales* $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. P. ej., $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\mathbf{f}(x, y) = (2x - y, y)$. Aquí $f_1(x, y) = 2x - y$, $f_2(x, y) = y$, o en notación matricial

$$\begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

   Nótese que, en efecto,

$$f_1(x,y) = \pi_1 \circ \mathbf{f}(x,y) = \pi_1(\mathbf{f}(x,y)) = \pi_1(2x - y, y) = 2x - y$$

   (y de forma análoga para $f_2(x, y) = y$).

2. Las *curvas parametrizadas*, esto es, $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$. P. ej., $\mathbf{f} : \mathbb{R} \backslash \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $\mathbf{f}(t) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right)$, curva conocida como 'folium de Descartes' (figura 1.9) ó $\mathbf{f} : [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $\mathbf{f}(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, cuyo conjunto imagen en $\mathbb{R}^2$ es una circunferencia de centro el origen y radio 1, que hemos parametrizando usando la coordenada polar θ.

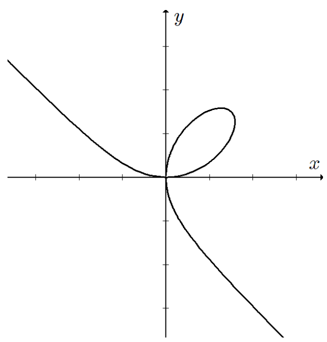

Figura 1.9: Folium de Descartes del ejemplo 12.

3. Las *superficies parametrizadas*, esto es, $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^m$. P. ej. la esfera de centro el origen y radio 1 se puede parametrizar usando las coordenadas esféricas mediante $\mathbf{f} : [0, 2\pi[\times [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $\mathbf{f}(\theta, \phi) = (\operatorname{sen}\phi\cos\theta, \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$.

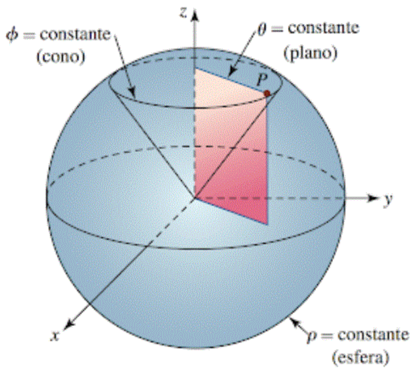

Figura 1.10: Esfera parametrizada en coordenadas esféricas.

1.5. Límites de funciones de varias variables

1.5.1. Límite de funciones escalares

Definición 1.19 (Límite de una función escalar)**.** Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ conjunto abierto, $\mathbf{x}_0 \in A \cup \partial A$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Se dice que λ es el límite de $f(\mathbf{x})$ cuando $\mathbf{x}$ tiende a $\mathbf{x}_0$ (o límite en $\mathbf{x}_0$) y se escribe $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \lambda$, si $\forall \epsilon > 0$, $\exists$ $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } \mathbf{x} \in A \text{ y } 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \text{ entonces } |f(\mathbf{x}) - \lambda| < \epsilon. \tag{1.15}$$

Nota 1.16. Nótese que es irrelevante el valor de $f(\mathbf{x}_0)$ (incluso podría no estar definido) porque $\mathbf{x}$ son puntos del dominio en el entorno reducido $B^*(\mathbf{x}_0, \delta)$. En esta definición, el valor de δ es en general dependiente tanto de ϵ como de $\mathbf{x}_0$. La definición es formalmente análoga al caso de funciones de una variable, sin embargo en la práctica el cálculo de estos límites es más complicado por la diversidad de subconjuntos que se pueden construir para hacer tender $\mathbf{x}$ a $\mathbf{x}_0$ con puntos del dominio de f.

Nota 1.17. Por simplicidad de la formulación teórica, estamos restringiendo la definición de límite a funciones definidas en conjuntos abiertos, con $\mathbf{x}_0 \in A \cup \partial A$. Con más generalidad es suficiente con que $\mathbf{x}_0$ sea un punto de acumulación (véase la nota 1.6) del dominio (no necesariamente abierto) de f, esto es, si para todo $\delta > 0$, $B^*(\mathbf{x}_0, \delta) \cap \operatorname{dom} f \neq \varnothing$.

Nota 1.18. La definición (1.15) se generaliza también a límites infinitos y límites en el infinito ($\|\mathbf{x}\| \to \infty$), que no reescribiremos por brevedad.

Ejemplo 13. Veamos que $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \operatorname{sen}(x-1)\cos\left(\frac{1}{x+y-1}\right) = 0$. La idea es estudiar la forma de $|f(x,y) - 0|$ y relacionarla con $\|(x,y)-(1,0)\|$ mediante desigualdades. En efecto,

$$\begin{aligned} |f(x,y) - 0| &= \left|\operatorname{sen}(x-1)\cos\left(\frac{1}{x+y-1}\right)\right| = \\ &= |\operatorname{sen}(x-1)|\left|\cos\left(\frac{1}{x+y-1}\right)\right| \leq |\operatorname{sen}(x-1)| < |x-1|, \end{aligned}$$

donde, por conveniencia, en la primera desigualdad se ha usado que $|\cos(\alpha)| \leq 1$ y en la segunda que $|\operatorname{sen}\alpha| \leq |\alpha|$. Por otro lado

$$|x-1| = \sqrt{(x-1)^2} \leq \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \|(x-1,y)\|.$$

Así pues, si $\|(x-1,y)\| < \delta$, entonces $|f(x,y) - 0| < |x-1| < \delta$, por lo tanto, si se quiere acotar $|f(x,y) - 0| < \epsilon$ con un $\epsilon > 0$ arbitrario, es suficiente con tomar $\delta = \epsilon$ para que se cumpla la definición de límite.

Proposición 1.2 (Propiedades del límite)**.** Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ conjunto abierto, $\mathbf{x}_0 \in A \cup \partial A$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces

1. Si f tiene límite en $\mathbf{x}_0$, el límite es único.
2. Si f tiene límite en $\mathbf{x}_0$, f está acotada en algún $B^*(\mathbf{x}_0, \delta_{\mathbf{x}_0})$.
3. Si f tiene límite en $\mathbf{x}_0$ y su valor $\lambda \neq 0$, f y λ tienen el mismo signo en algún $B^*(\mathbf{x}_0, \delta_{\mathbf{x}_0})$.

Proposición 1.3 (Álgebra de límites)**.** Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ conjunto abierto, $\mathbf{x}_0 \in A \cup \partial A$, $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Supongamos que existen $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ y $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})$. Entonces

1. $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} [f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})] = \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) + \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})$.
2. $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} [f(\mathbf{x})\, g(\mathbf{x})] = \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})$.
3. $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} [f(\mathbf{x}) / g(\mathbf{x})] = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) / \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})$ ($\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) \neq 0$).

4. $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}\left[f(\mathbf{x})^{g(\mathbf{x})}\right] = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})^{\text{lím}_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})}$, con $f(\mathbf{x}) > 0$.

5. Si $h : B \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en $\text{lím}_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) \in B$, entonces $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} h(f(\mathbf{x})) = h\left(\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})\right)$.

Proposición 1.4. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ conjunto abierto, $\mathbf{x}_0 \in A \cup \partial A$, $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $\text{lím}_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = 0$ y g está acotada en A, entonces

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})\, g(\mathbf{x}) = 0.$$

Ejemplo 14. Obtenemos $\text{lím}_{(x,y)\to(1,0)} \operatorname{sen}(x-1)\cos\left(\frac{1}{x+y-1}\right)$ (ejemplo 13).

El valor de este límite es 0 por aplicación de la proposición 1.4 dado que $\text{lím}_{(x,y)\to(1,0)} \operatorname{sen}(x-1) = 0$ y la función coseno está acotada en todo su dominio.

Proposición 1.5 (Regla de encaje)**.** Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ conjunto abierto, $\mathbf{x}_0 \in A \cup \partial A$, $f, g, h : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Si existe un $B(\mathbf{x}_0, \delta)$ de forma que

$$f(\mathbf{x}) \le g(\mathbf{x}) \le h(\mathbf{x})$$

para cada $\mathbf{x} \in A \cap B^*(\mathbf{x}_0, \delta)$, y si $\text{lím}_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \text{lím}_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} h(\mathbf{x}) = \lambda$, entonces

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = \lambda.$$

Nota 1.19*.* Cuando están definidas las operaciones, el cálculo de límites es similar el caso de una variable. P. ej.

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\operatorname{arcsen}(x/y)}{1+xy} = \frac{\operatorname{arcsen} 0}{1+0} = 0, \quad \lim_{\|(x,y)\|\to\infty} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} = 1.$$

Las situaciones $0/0$, ∞/∞, 0^0, ∞^0, 1^∞ e $\infty - \infty$ se denominan **indeterminaciones** y su valor depende de cada caso. Las técnicas de manipulación algebraica, y el uso infinitos e infinitésimos equivalentes, en el cálculo de límites en funciones de una variable son también aplicables para límites de funciones escalares.

Ejemplo 15. Calculamos $\text{lím}_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log\left(1+x^2y^2\right)}{1-\cos(xy)}$.

En este caso se tiene una indeterminación $0/0$. Ésta se puede eludir empleando los infinitésimos equivalentes $\log(1+\epsilon) \sim \epsilon$, y $1 - \cos\epsilon \sim \epsilon^2/2$. En efecto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+x^2y^2)}{1-\cos(xy)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2/2} = 2.$$

Ejemplo 16. Calculamos $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+xy)^{\frac{1}{xy}}$.

Se trata de una indeterminación 1^{∞}, relacionadas con la definición del número e. En efecto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+xy)^{\frac{1}{xy}} = \exp\left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{xy}(1+xy-1) \right) = \mathrm{e},$$

dado que existe el límite del argumento de la exponencial.

Ejemplo 17. Obtenemos $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^4}$.

Se tiene una indeterminación $0/0$. Procederemos en esta ocasión con la proposición 1.5. Para ello consideramos

$$\left| \frac{x^2y}{x^2+y^4} \right| = \left| \frac{x^2}{x^2+y^4} \right| |y| \leq |y|$$

ya que el primer factor es menor o igual que 1 en virtud de que $x^2 \leq x^2+y^4$. Por definición de valor absoluto

$$-|y| \leq \frac{x^2y}{x^2+y^4} \leq |y|\,, \text{ para todo } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$$

Dado que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$, por aplicación de la proposición 1.5,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^4} = 0.$$

Definición 1.20 (Límite restringido)**.** Sean $S \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^n$, A conjunto abierto, $\mathbf{x}_0 \in S \cup \partial S$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Se dice que λ es el **límite restringido** a S de $f(\mathbf{x})$ cuando $\mathbf{x}$ tiende a $\mathbf{x}_0$ y se escribe $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0, \mathbf{x}\in S} f(\mathbf{x})$, si λ es el límite de la restricción a S de la función f,

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}\in S}} f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_S(\mathbf{x})\,. \tag{1.16}$$

Nota 1.20. La idea de esta definición es hacer tender $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$ sólo por puntos de S. La utilidad reside en probar que el límite de una función no existe en virtud del siguiente resultado. También para buscar candidatos al valor del límite, que luego pueden ser probados mediante alguno de los resultados anteriores.

Proposición 1.6. Sean $S \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^n$, A conjunto abierto, $\mathbf{x}_0 \in S \cup \partial S$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Si existe $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$, también existe $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0, \mathbf{x}\in S} f(\mathbf{x})$ y ambos son iguales,

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}\in S}} f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})\,. \tag{1.17}$$

Proposición 1.7. Sean $S_1, S_2 \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^n$, A conjunto abierto, $\mathbf{x}_0 \in (S_1 \cap S_2) \cup \partial (S_1 \cap S_2)$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Se cumple que

1. Si $\nexists \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0, \mathbf{x}\in S_1} f(\mathbf{x})$ para algún S_1, entonces $\nexists \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$.

2. Si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0, \mathbf{x}\in S_1} f(\mathbf{x}) \neq \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0, \mathbf{x}\in S_2} f(\mathbf{x})$, entonces $\nexists \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$.

Nota 1.21. Un tipo importante de límite restringido cuando trabajamos en $\mathbb{R}^2$ se tiene cuando el subconjunto S es una **curva**, ya que reduce el cálculo del límite al caso de una variable. Si la curva es una **recta** se denomina **límite direccional**.

Ejemplo 18. Estudiamos $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{y+x}$.

Se trata de una indeterminación 0/0. Consideramos los conjuntos

$$S_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = 0\right\}, \ S_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x = 0\right\},$$

que son, respectivamente, los ejes coordenados x e y. Los límites restringidos a S_1 y S_2 son:

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S_1}} \frac{y}{y+x} &= \lim_{x\to 0} \frac{0}{0+x} = 0,\\
\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S_2}} \frac{y}{y+x} &= \lim_{y\to 0} \frac{y}{y+0} = 1,
\end{aligned}$$

por lo tanto no existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{y+x}$ por aplicación de la proposición 1.7.

Ejemplo 19. Una técnica habitual consiste en emplear **familias uniparamétricas** de curvas, como haces de rectas o parábolas para pasen por el punto (x_0, y_0), de manera que se busca comprobar si el resultado del límite restringido a estas curvas depende del parámetro de la familia. Sí es así, se habrá probado la inexistencia del límite de la función por aplicación de la proposición 1.7.

P. ej., estudiamos $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ con

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{y+x^2} & \text{si } \ y \neq -x^2 \\ 1 & \text{si } \ y = -x^2 \end{cases}.$$

Definimos $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = mx, \ m \in \mathbb{R}\}$. El parámetro del haz de rectas que pasan por $(0,0)$ es m. Calculamos

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S_1}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S_1}} \frac{y}{y+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx}{mx+x^2}$$

este límite es 0 si $m = 0$. Si $m \neq 0$ el límite direccional es $\lim_{x\to 0} \frac{m}{m+x} = 1$. Por lo tanto, en virtud de la proposición 1.7, no existe el límite de la función.

Nota 1.22. También en el caso de dos variables puede resultar útil estudiar la existencia de límite mediante el uso de las **coordenadas polares** (ec. 1.7) centradas en (x_0, y_0). Esto se hace con el límite restringido al conjunto

$$S_\theta = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x = x_0 + r\cos\theta,\ y = y_0 + r\operatorname{sen}\theta,\ r > 0\right\}, \tag{1.18}$$

es decir,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in S_\theta}} f(x, y) = \lim_{r\to 0^+} f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\operatorname{sen}\theta). \tag{1.19}$$

Esto reduce el cálculo del límite al caso de una variable, permitiendo obtener candidatos al valor del límite y demostrando que éste no existe en las condiciones generales de un límite restringido. Pero veremos que ofrece además una herramienta que sí permite demostrar el valor del límite de la función bajo ciertas condiciones (proposición 1.8).

Ejemplo 20. Estudiamos el valor del límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{x}\left(x^2 + y^2\right)$$

con $\operatorname{dom} f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x > 0, y > 0\}$.

Usamos coordenadas polares según (1.19), es decir,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S_\theta}} \frac{y}{x}\left(x^2 + y^2\right) = \lim_{r\to 0^+} \frac{r\operatorname{sen}\theta}{r\cos\theta} r^2 = \lim_{r\to 0^+} r^2\tan\theta.$$

Teniendo en cuenta $\operatorname{dom} f$ se tiene que $0 < \theta < \pi/2$, y el límite anterior es 0, independiente de θ y por lo tanto 0 es un candidato para el valor del límite de la función (si $\theta = \pi/2$ el límite anterior no está definido, pero este caso no está incluido en el problema). Veamos que podemos encontrar un límite restringido con otro valor. En efecto, si consideramos $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x = y^3\}$ obtenemos

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S}} \frac{y}{x}\left(x^2 + y^2\right) = \lim_{y\to 0^+} \frac{y}{y^3}\left(y^6 + y^2\right) = \lim_{y\to 0^+} \left(y^4 + 1\right) = 1.$$

Por lo tanto no existe el límite de la función por la proposición 1.7.

Definición 1.21. Sea $f(r, \theta) = f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\operatorname{sen}\theta)$, la función definida en coordenadas polares, tal que $\lim_{r\to 0^+} f(r, \theta) = \lambda$ para todo θ en $\operatorname{dom} f$. Diremos que λ es **uniformemente independiente** respecto de θ si existe una función $h : B(0, \delta) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$|f(r, \theta) - \lambda| \leq h(r) \quad \text{para todo} \ (r, \theta) \in \operatorname{dom} f$$

y $\lim_{r\to 0^+} h(r) = 0$.

Proposición 1.8. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^2$ conjunto abierto, $\mathbf{x}_0 \in A \cup \partial A$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Si existe $\lim_{r\to 0^+} f(r,\theta) = \lambda$ y es uniformemente independiente respecto de θ, entonces existe $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(x,y) = \lambda$.

Ejemplo 21. En el ejemplo20, $|f(r,\theta) - \lambda| = |r^2 \tan\theta|$ no se puede acotar por una función $h(r)$ que tienda a 0 con $r \to 0^+$, por lo tanto $\lambda = 0$ no es uniformemente independiente respecto a θ.

Ejemplo 22. Estudiamos $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ con $f(x,y) = \frac{x^2(1+2y)+y^2}{x^2+y^2}$, $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Calculamos

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S_\theta}} \frac{x^2(1+2y)+y^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^2\cos^2\theta\,(1+2r\operatorname{sen}\theta) + r^2\operatorname{sen}^2\theta}{r^2} =$$

$$= \lim_{r\to 0^+} \left(1 + 2r\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta\right) = 1.$$

Entonces 1 es candidato al valor del límite, al ser independiente de θ. Además,

$$|f(r,\theta) - 1| = \left|2r\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta\right| = 2r\,|\operatorname{sen}\theta|\,\left|\cos^2\theta\right| \le 2r$$

dado que se puede acotar por 1 el valor absoluto de ambas funciones trigonométricas. Hemos encontrado así la función $h(r) = 2r$ tal que $\lim_{r\to 0^+} h(r) = 0$ y por lo tanto el valor del límite es uniformemente independiente de θ. En virtud de la proposición 1.8, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$.

1.5.2. Límite de funciones vectoriales

Definición 1.22 (Límite de una función vectorial)**.** Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ conjunto abierto, $\mathbf{x}_0 \in A \cup \partial A$, $\mathbf{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Se dice que $\boldsymbol{\lambda}$ es el límite de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ cuando $\mathbf{x}$ tiende a $\mathbf{x}_0$ (o límite en $\mathbf{x}_0$) y se escribe $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\lambda}$, si $\forall \epsilon > 0$, $\exists$ $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } \mathbf{x} \in A \text{ y } 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \text{ entonces } \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\lambda}\| < \epsilon. \tag{1.20}$$

Nota 1.23. Veamos que podemos trasladar las propiedades de los límites de funciones escalares a la situación vectorial, permitiendo estudiar los límites *coordenada a coordenada.*

Si consideramos las funciones componente de $\mathbf{f}$, esto es, los m campos escalares definidos en el $\operatorname{dom}\mathbf{f}$ mediante la composición $f_j = \pi_j \circ \mathbf{f}$ $(j = 1,\dots,m)$ y suponemos que existen su límites, es decir, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_j(\mathbf{x}) = \lambda_j$, se tiene que dado $\epsilon' > 0$, existe un conjunto de valores δ_j $(j = 1,\dots,m)$ tal que, para cada j

$$\text{si } \mathbf{x} \in A \text{ y } 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta_j \text{ entonces } |f_j(\mathbf{x}) - \lambda| < \epsilon'. \tag{1.21}$$

Entonces, tomando $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$ y construyendo $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, se tendrá que si $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ se cumple que

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\lambda}\| < |f_1(\mathbf{x}) - \lambda_1| + \ldots + |f_m(\mathbf{x}) - \lambda_m| = \epsilon' + \ldots + \epsilon'.$$

Es suficiente por ello seleccionar $\epsilon' = \epsilon/m$ para encontrar el δ que garantiza que $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\lambda}\| < \epsilon$, esto es, $\text{lím}_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\lambda}$. Este resultado queda formalizado en la siguiente proposición.

Proposición 1.9. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ conjunto abierto, $\mathbf{x}_0 \in A \cup \partial A$, $\mathbf{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$, y f_j $(j = 1, \ldots, m)$ las funciones componentes de $\mathbf{f}$. Entonces existe $\text{lím}_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\lambda}$ si, y sólo si, existe $\text{lím}_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_j(\mathbf{x}) = \lambda_j$ para cada $j = 1, \ldots, m$, y en tal caso se cumple que $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$.

Ejemplo 23. Estudiamos el límite de $\mathbf{f}$ de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$, en el punto $\mathbf{x}_0 = (1, 1)$ con

$$\mathbf{f}(x, y) = \left(\frac{\log(3 - x^2 - y^2)}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}}, \frac{x^2\sqrt{y}}{x^2 + y^2}, \cos(1 - xy)^{\frac{1}{1-xy}} \right).$$

Calculamos los límites de cada componente. En la primera de ellas tenemos una indeterminación $0/0$, que evitamos usando el infinitésimo equivalente $\log(1 + \epsilon) \sim \epsilon$,

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(1,1)} f_1(x, y) &= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{\log(3 - x^2 - y^2)}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}} \\
&= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{\log[1 + (2 - x^2 - y^2)]}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}} \\
&= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{2 - x^2 - y^2}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}} = 0.
\end{aligned}$$

La segunda componente no presenta indeterminación,

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} f_2(x, y) = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2\sqrt{y}}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}.$$

En la tercera la indeterminación es del tipo 1^∞, que resolvemos según

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(1,1)} f_3(x, y) &= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \cos(1 - xy)^{\frac{1}{1-xy}} \\
&= \exp\left[\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{1}{1 - xy} (\cos(1 - xy) - 1) \right].
\end{aligned}$$

En el límite del argumento se tiene una indeterminación del tipo 0/0, que evitamos con el infinitésimo equivalente $1 - \cos\epsilon \sim \epsilon^2/2$. Entonces

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} f_3(x,y) = \exp\left[\frac{1}{1-xy}\left(-\frac{1}{2}\right)(1-xy)^2\right] = e^0 = 1.$$

Por lo tanto, el límite de la función vectorial es

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left(0, \frac{1}{2}, 1\right).$$

1.6. Continuidad

Definición 1.23. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ conjunto abierto, $\mathbf{x}_0 \in A$, $\mathbf{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Se dice que $\mathbf{f}$ es **continua en el punto $\mathbf{x}_0$** si

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0). \tag{1.22}$$

Definición 1.24. Sea $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Se dice que $\mathbf{f}$ es **continua en** A si lo es en todo punto de A.

Proposición 1.10. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in A$, $\mathbf{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$, y f_j $(j = 1, \ldots, m)$ las funciones componentes de $\mathbf{f}$. Entonces $\mathbf{f}$ es **continua en el punto $\mathbf{x}_0$** si, y sólo si, cada función f_j es continua en el punto $\mathbf{x}_0$.

Nota 1.24. Por lo tanto la continuidad en un punto también se establece coordenada a coordenada, como consecuencia directa de la proposición 1.9.

Proposición 1.11 (Propiedades)**.** Sean $\mathbf{f}, \mathbf{g} : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ funciones continuas en $\mathbf{x}_0 \in A$. Entonces,

1. $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ y $\lambda\mathbf{f}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ son continuas en $\mathbf{x}_0$.

2. Si $m = 1$, fg es continua en $\mathbf{x}_0$, si además $g(\mathbf{x}_0) \neq 0$, entonces f/g es continua en $\mathbf{x}_0$.

Proposición 1.12. Sean $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ continua en $\mathbf{x}_0 \in A$, y $\mathbf{g} : B \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ continua en $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$. Entonces $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ es continua en $\mathbf{x}_0$.

Ejemplo 24. Dada $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en A, la función $|f(\mathbf{x})|$ es continua en A, ya que $g(t) = |t|$ es una función continua en $\mathbb{R}$ y $|f(\mathbf{x})| = (g \circ f)(\mathbf{x})$.

Ejemplo 25. A resultas de las dos últimas proposiciones se puede establecer la continuidad de la mayor parte de funciones (escalares o vectoriales) con las que trabajaremos en este curso:

1. Los polinomios y las funciones racionales son funciones continuas en todo punto de su dominio.
2. Cualquier función que se obtenga a través de la suma, producto, cociente o composición de funciones polinómicas o racionales con las funciones elementales es continua en todos los puntos de su dominio.

Nota 1.25. En el caso de funciones definidas a trozos en general se deberá aplicar la definición de continuidad en aquellos puntos en cuyo entorno la función venga dada por más de una expresión.

Ejemplo 26. Estudiamos la continuidad en $\mathbb{R}^2$ de

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2 y}{(x-1)^4 + y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (1,0) \end{cases}.$$

Se trata de una función definida a trozos. Si $(x,y) \neq (1,0)$ es una función racional cuyo denominador no se anula en ningún punto, por lo tanto f es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$. En un entorno del punto $(x,y) = (1,0)$ la función está dada por más de una expresión, por lo que aplicamos la definición de continuidad en el punto $(1,0)$. Estudiamos entonces $\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$, que presenta una indeterminación $0/0$. Consideramos el límite direccional, según las parábolas $y = m(x-1)^2$ que pasan por $(1,0)$, esto es, definimos el conjunto $S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus y = m(x-1)^2, \, m \in \mathbb{R}\right\}$,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,0) \\ (x,y)\in S}} \frac{(x-1)^2 y}{(x-1)^4 + y^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^4}{(x-1)^4} \frac{m}{1+m^2} = \frac{m}{1+m^2}.$$

Dado que el límite restringido depende de m, el límite de la función no existe por la proposición 1.7. En consecuencia, la función no es continua en $(1,0)$.

Teorema 1 (de Weierstrass)**.** *Sean* $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *continua en* A *y este conjunto es compacto, entonces* $\mathbf{f}(A)$ *es compacto.*

Nota 1.26. En el caso particular de funciones escalares, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, continua en el compacto A, el teorema establece que $f(A)$ es un compacto de $\mathbb{R}$. Al ser $f(A)$ acotado, entonces existen los valores ínfimo y supremo de $f(A)$ en $\mathbb{R}$. Tanto si los valores ínfimo como supremo son puntos de $\operatorname{Int} A$, aislados de $f(A)$ o de $\partial f(A)$, pertencen a $f(A)$ porque es cerrado. Por lo tanto son valores **mínimo** y **máximo absolutos**. Esto lo enunciamos en la siguiente versión del teorema de Weirstrass para funciones escalares.

Teorema 2 (de Weierstrass para funciones escalares)**.** *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en A y este conjunto es compacto, entonces existen (al menos) dos puntos $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in A$ tales que*

$$f(\mathbf{x}_1) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_2), \text{ para todo } \mathbf{x} \in A.$$

Nota 1.27. En consecuencia $f(\mathbf{x}_1)$ y $f(\mathbf{x}_2)$ son respectivamente el mínimo y el máximo absolutos de $f(A)$. También se dice que f alcanza un mínimo absoluto en $\mathbf{x}_1$ y un máximo absoluto en $\mathbf{x}_2$.

Ejemplo 27. Estudiamos si dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

y dado el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 4x - |y| > 0\}$, se puede afirmar que f está acotada en $\bar{B}((0,0),1) \cap A$.

Como el conjunto A es abierto y $\bar{B}((0,0),1)$ es cerrado, $\bar{B}((0,0),1) \cap A$ no es cerrado (la figura 1.11 puede ayudar a visualizar que no incluye toda su frontera). A su vez, $\bar{B}((0,0),1) \cap A$ está contenido en el entorno abierto $B((0,0),2)$, por lo tanto es un conjunto acotado.

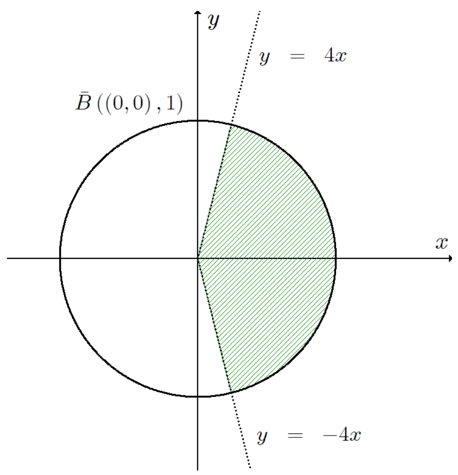

Figura 1.11: La zona sombreada representa $\bar{B}((0,0),1) \cap A$ en el ejemplo 27.

Consideramos $\bar{A} = A \cup \partial A$, esto es, el conjunto

$$\bar{A} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 4x - |y| \geq 0 \right\},$$

que es cerrado. Por lo tanto $K = \bar{B}\left((0,0), 1 \right) \cap \bar{A}$ es un conjunto cerrado y acotado, esto es, compacto. Para la aplicación del teorema de Weierstrass estudiamos la continuidad de f en este conjunto. Si $(x, y) \neq (0,0)$ la función es continua por ser producto y composición de funciones continuas. Dado que el siguiente límite restringido en coordenadas polares es

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in S_\theta}} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{r \to 0^+} \frac{r^2 \cos^2 \theta}{r} = 0,$$

y 0 es uniformemente independiente respecto de θ (la comprobación queda como ejercicio), por la proposición 1.8, 0 es el valor del límite de tal función. Como a su vez la función $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2} \right)$ está acotada en $\mathbb{R}^2$, por aplicación de la proposición 1.4,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0 = f(0,0),$$

luego f es continua en $\mathbb{R}^2$. En particular, f es continua en el compacto K. Entonces el teorema 2 dice que existen (al menos) dos puntos $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K$ tales que $f(\mathbf{x}_1) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_2)$ para todo $\mathbf{x} \in K$. Por la definición 1.12, f es una función acotada en K. Como $\bar{B}\left((0,0), 1 \right) \cap A \subset K$, f es una función acotada en $\bar{B}\left((0,0), 1 \right) \cap A$.

Infinitésimos equivalentes $(x \to 0)$

$\operatorname{sen} x \sim x$	$e^x - 1 \sim x$
$\tan x \sim x$	$a^x - 1 \sim x \log a$
$\operatorname{arcsen} x \sim x$	$\log(1 + x) \sim x$
$\arctan x \sim x$	$\log_a(1 + x) \sim x \log_a e$
$1 - \cos x \sim x^2/2$	$(x + 1)^n - 1 \sim nx$, $n > 1$

Ejercicios

Ejercicio 1. Obtener el dominio de las siguientes funciones y representar gráficamente. Establecer si es un conjunto abierto o cerrado.

a) $f(x,y) = \operatorname{sen}\left(x - \sqrt{y-1}\right)$

b) $f(x,y) = \dfrac{\log\left(x^2 - y^2 - 1\right)}{\sqrt{x-y}}$

c) $f(x,y) = \dfrac{x^{x+y}}{\log\left(x + y^2 - 1\right)}$

d) $\mathbf{f}(x,y) = \left(x^{\operatorname{sen}(x+y)}, \sqrt{x^2+y^2-1}\right)$

e) $\mathbf{f}(x,y) = \left(\log(x+y), \operatorname{arcsen}\left(x^2 - y - 1\right)\right)$

f) $\mathbf{f}(x,y) = \left(\left|x^2 - y\right|, \arccos(x-y-1)\right)$

g) $\mathbf{f}(x,y) = \left(|y-x-2|, \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x+y)}\right)$

Sol.: $\operatorname{dom} f$ son los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ tales que:

a) $y \geq 1$, cerrado; b) $x^2 - y^2 > 1$, $x > y$, abierto; c) $x^2 + y^2 > 1$, $x > 0$, $x + y^2 \neq 2$, abierto (recuérdese el ejemplo 5); d) $x^2 + y^2 \geq 1$, $x > 0$, no es abierto ni cerrado; e) $x^2 - 2 \leq y \leq x^2$, $-x < y$, no es abierto ni cerrado; f) $x - 2 \leq y \leq x$, cerrado; g) $y = k\pi - x$, $k \in \mathbb{Z}$, cerrado.

Ejercicio 2. Dadas las siguientes superficies de $\mathbb{R}^3$ definidas por la gráfica de las siguientes funciones, obtener las curvas de nivel L_k, indicando para que valores de k existen. Representarlas gráficamente.

a) $f(x,y) = e^{x+y^2-1}$

b) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 3x - 6y + 1$

c) $f(x,y) = \log\left(x^2 + y^2 - 2x + 1\right)$

d) $f(x,y) = \dfrac{2|x+y|}{x^2 + 3y^2}$

Sol.: L_k son los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ tales que:

a) $x = -y^2 + k$, $k \in \mathbb{R}$ (parábolas abiertas a la izquierda); b) $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y-3)^2 = k^2$, $k > 0$ (circunferencias de centro $(3/2, 3)$ y radio k); c) $(x-1)^2 + y^2 = k$, $k > 0$ (circunferencias de centro $(1,0)$ y radio k); $\frac{(x \pm 1/k)^2}{4/(3k^2)} + \frac{(y \pm 1/(3k))^2}{4/(9k^2)} = 1$, $k > 0$

(dos elipses, de centros $(1/k, 1/(3k))$ y $(-1/k, -1/(3k))$ y semiejes $2\sqrt{3}/(3k)$ y $2/(3k)$), $y = -x$ (recta, excluyendo el origen).

Ejercicio 3. Demostrar que no existe el límite en $(0,0)$ de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

b) $f(x,y) = \dfrac{\tan(x+3y)}{\operatorname{sen}(2x-6y)}$

c) $f(x,y) = (1+x+3y)^{\frac{1}{x+y}}$

d) $f(x,y) = \dfrac{\log_3(x^4-4y+1)}{\arctan(x-2y^2)}$

e) $f(x,y) = \left(\dfrac{\operatorname{arcsen} y}{y}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

Ejercicio 4. Calcule los límites siguientes:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \operatorname{sen}(x-1)\cos\left(\frac{1}{x+y-1}\right)$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}^2(2x+3y)}{1-\cos(2x+3y)}$

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+x^2y^2)}{1-\cos(xy)}$

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{1+3(x^2+y^2)}{1-2(x^2+y^2)}\right]^{\frac{1}{x^2+y^2}}$

e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$

f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$

g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2^{x+2y^2}-1}{6x+12y^2}$

h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}-1}{\operatorname{sen} x\log(1+y)}$

Sol.: a) 0; b) 2; c) 2; d) e^5;e) 0; f) 0; g) $\log(2)/6$; h) 1.

Ejercicio 5. Estudie los límites siguientes

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6}$

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy-x+y}{x+y}$

e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x\operatorname{sen}(\pi y)}{(x+1)(y-1)}$

g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(3,4)} \frac{(x-3)(y-4)}{(x-3)^2+(y-4)^2}$

h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{[1-\cos(xy)]\operatorname{sen} x}{x^2+y^2}$

Sol.: a) No existe; b) No existe; c) 0; d) No existe; e) No existe; f) $-\pi/2$; g) No existe; h) 0.

Ejercicio 6. Estudie la continuidad de las funciones siguientes:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2(e^x-1)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2+(x-y)^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x \operatorname{sen} y}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

d) $f(x,y) = \begin{cases} \arctan\left(e^{\frac{1}{|x|+2|y|}}\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \pi/2 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Sol.: a) Continua en $\mathbb{R}^2$; b) Continua en $\mathbb{R}^2$; c) Continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; d) Continua en $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 7. Obtenga la relación entre p y q para que la función

$$f(x,y) = \frac{x^p y^q}{x^2+y^2+xy}$$

pueda prolongarse por continuidad al punto $(0,0)$.

Sol.: $p, q \geq 0$, $p+q-2 > 0$.

Ejercicio 8. Demostrar que la siguiente función alcanza máximo y mínimo absolutos en $\bar{B}((0,0),1)$ y obtenerlos,

$$f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}.$$

Sol.: En $(0,0)$ se alcanza el máximo absoluto 1, en $\partial\bar{B}((0,0),1)$ se alcanza el mínimo absoluto $1/2$.